CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS

Un BUT PÉDAGOGIQUE FORT

- acquérir le vocabulaire de la géométrie (segment [AB], droite (AB), point A, longueur AB, intersection de deux droites, centre d'un cercle, ...)
- lire et rédiger (proposer une construction géométrique des tangentes au cercle $\mathcal{C}$ passant le point A)
- définition et nommage d'un objet / existence et unicité de cet objet. (les deux droites sont sécantes en un point que nous nommons A)
- Programme de construction // programme informatique // raisonnement hypothetico-déductif (preuve) (phrases courtes, ordre, utilisation des étapes précédentes)

CONSTRUCTIONS ÉLÉMENTAIRES

- Médiatrice de deux points
- Milieu

- Perpendiculaire à une droite passant par un point
- Bissectrice
- Triangle équilatéral
- Tangentes à un cercle passant par un point

UN EXEMPLE EMBLÉMATIQUE :
CONSTRUCTION DU PENTAGONE RÉGULIER

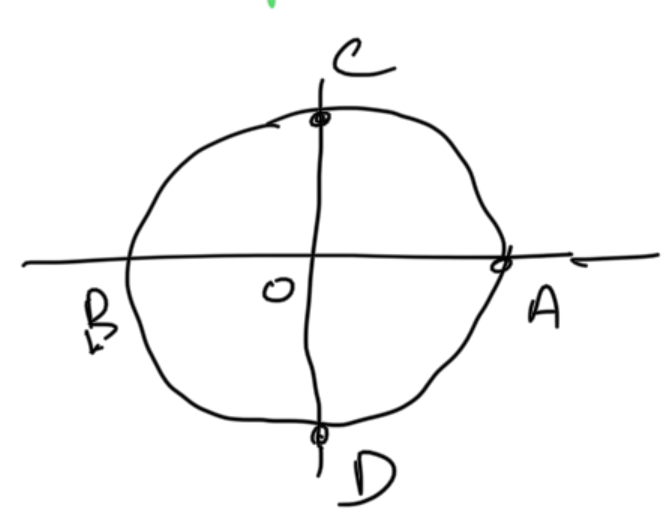
On part du calcul de $\cos \frac{2\pi}{5}$:

$\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$ sont les racines de $4X^2+2X-1$

donc $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

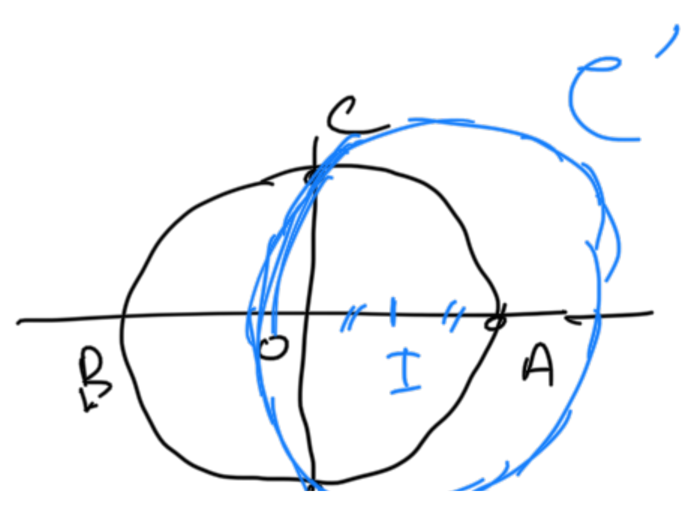
On utilise le théorème de PYTHAGORE pour tracer $\sqrt{5}$!

1) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O avec deux diamètres [AB] et [CD] perpendiculaires



2) Soit I le milieu de [OA] et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre I passant par C

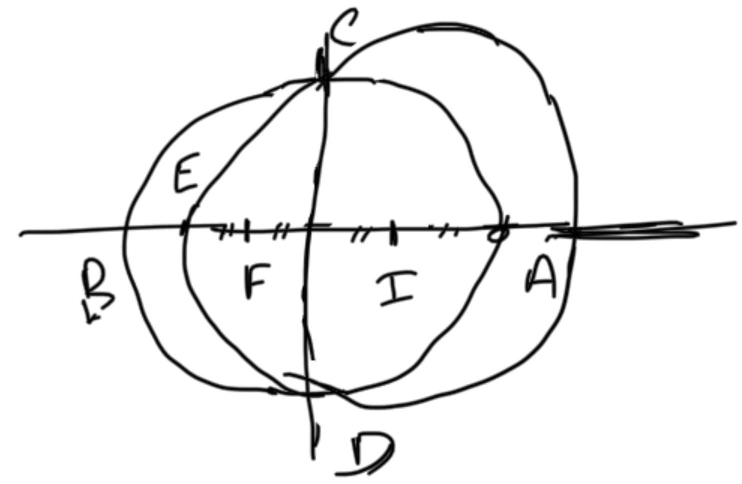
$IC = \sqrt{5}$ d'après le théorème de PYTHAGORE



2 $IC^2 = OI^2 + OC^2$

3) le cercle $\mathcal{C}'$ coupe le segment $[OB]$ en E

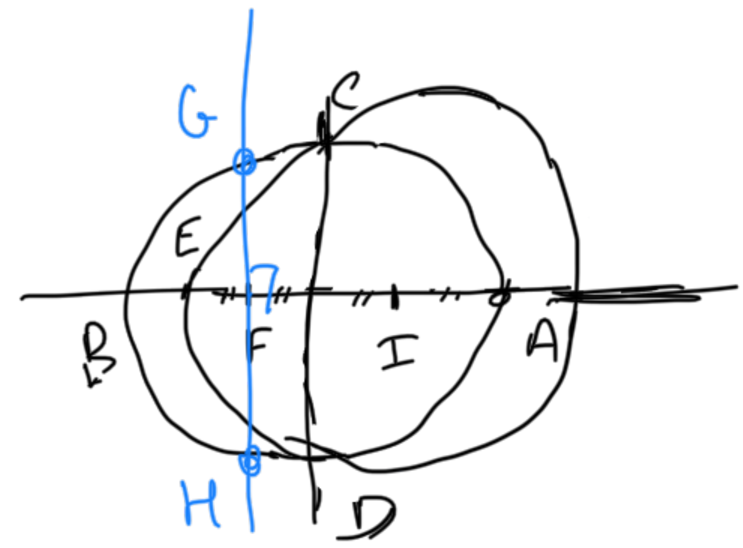
Soit F le milieu du segment $[OE]$



$OE = IE - OI = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$OF = \frac{1}{2} OE = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos \frac{2\pi}{5}.$

4) La droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à (AB) en F coupe le cercle $\mathcal{C}$ aux points G et H

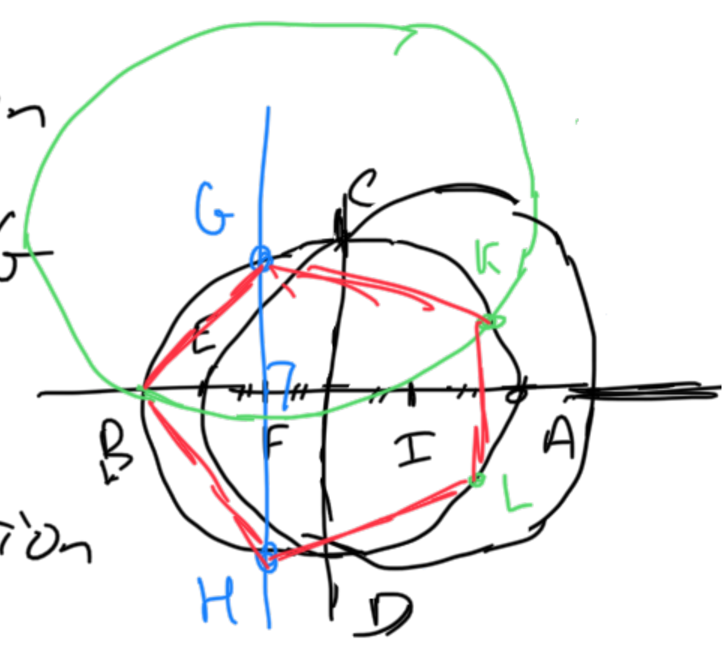


L'angle $(\widehat{\vec{OG}, \vec{OB}})$ a pour cosinus $\cos \frac{2\pi}{5}$

donc $(\widehat{\vec{OG}, \vec{OB}}) = \frac{2\pi}{5} = (\widehat{\vec{OB}, \vec{OH}})$

5) Soit K la deuxième intersection du cercle $\mathcal{C}$ et du cercle de centre G passant par B

Soit L la deuxième intersection du cercle $\mathcal{C}$ et du cercle de centre H passant par B



BGKLH est un pentagone régulier inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$.

LES TRAVAUX DE DESCARTES

On se donne deux points A et I et on déclare que AI est l'unité.
On considère le repère orthonormé (A, I, J).

Un point est constructible à la règle et au compas si on peut l'obtenir à partir de A et I comme intersection de droites et de cercles constructibles.
Une droite est constructible si elle passe par deux points distincts constructibles.
Un cercle est constructible si son centre est constructible et si son rayon est constructible.
Un nombre est constructible s'il est la distance entre deux points constructibles ou son opposé.

[DESCARTES] Il suffit de travailler en coordonnées :

- Un point est constructible si et seulement si ses coordonnées le sont.
- Une droite est constructible si et seulement si elle a une équation cartésienne avec des coefficients constructibles.

Remarque : intersection de deux droites :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \end{cases}$$

$$y = \frac{-\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Il suffit de faire des multiplications, soustractions et divisions de nombres constructibles.

Théorème [DESCARTES, discours de la méthode, Géométrie] Les nombres constructibles à la règle et au compas sont ceux que l'on peut obtenir à partir de 1 par les quatre opérations $+$, $\times$, $-$, $\div$ et $\sqrt{}$

Remarque La droite (AB) a pour équation

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}$$

Remarque L'extraction de racines carrées pour les intersections avec les cercles : équations du degré 2.